II. *Solutio Generalis Problematis* XV. *propositi à* D. de Moivre, *in tractatu* de Mensura Sortis *inserto Actis Philosophicis Anglicanis* No 329. *pro numero quocunque Collusorum*: *per* D. Nicolaum Bernoulli, Basiliensem, Reg. Soc. Sodalem.

CUM Methodus synthetica, quâ usus est *D. de Moivre* ad inveniendam cujusque Collusoris sortem, in usum verti nequeat tunc quando plures quam tres sunt collusores, ob vix perspiciendam legem progressionis serierum quæ se offerunt; ostendam hic quo modo Analysis in ejusmodi Problematibus, ubi depositum continuo augetur, adhiberi queat: eumque in finem demonstrationem dabo analyticam trium Theorematum, quæ inveni, & quidem diu ante visum D. *Moyvræi* libellum de Mensura Sortis, occasione triplicis quæstionis mihi ab amico circa ludum hunc, quem Galli vocant *le Jeu de la Poule*, propositæ, pro inveniendis scil. probabilitate vincendi, lucro item vel damno cujusque Collusoris, & duratione certaminis.

THEOREMA I.

Si Collusores aliquot *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. quorum numerus est $n+1$ & dexteritates sunt æquales, deponant singuli 1, & istis conditionibus certent. 1°. Ut illorum duo *A* & *B* ludum incipiant. 2°. Ut victus locum suum tertio *C* cedat, ita ut ille tertius *C* jam cum victore contendat, quique ex hoc certamine victor evaserit cum quarto *D* ludat, & ita deinceps. 3°. Ut ille depositum totum obtineat, qui omnes collusores successivè vicerit. Dico probabilitates vincendi duorum quorumlibet collusorum sese immediate in ordine ludendi sequentium esse in ratione $1+2^n$ ad 2^n, adeoque expectationes lusorum *A* (*B*), *C*, *D*, *E*, &c. esse in progressione Geometrica.

Demonstratio.

Ponantur expectationes vincendi ipsius A vel $B = a$, ipsius $C = c$, ipsius $D = d$, ipsius $E = e$, &c. Porro cum accidere possit, ut collusor aliquis prima vice in ludum intrans inveniat adversarium qui vel nondum, vel semel, vel bis, vel ter, &c. jam successive victor extitit, vocetur expectatio lusoris illius primo casu $= z$, secundo $= y$, tertio $= x$, quarto $= u$, quinto $= t$, &c. Item cum collusor aliquis vinci possit ab adversario qui antea jam vel nullum, vel unum, vel duos, vel tres, &c. collusores successive vicit, ita ut exiens è ludo relinquat adversarium qui vel semel, vel bis, vel ter, vel quater &c. victor extitit, vocetur expectatio seu probabilitas vincendi ejus qui exit è ludo primo casu $= h$, secundo $= k$, tertio $= l$, quarto $= m$, &c. Hisce omnibus positis habebuntur sequentes novem series æquationum signatæ N°. 1. N°. 2. N°. 3, &c. usque ad N°. 9. *Tab.* I. Ratio eas inveniendi breviter hæc est.

Inter æquationes N. 1°. reperitur *ex. gr.* $f = \frac{1}{8}t + \frac{1}{8}u + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y$. Nam collusor F certabit vel cum collusore A, vel B, vel C, vel D, vel E: ut primum vel secundum contingat, oportet ut vel A vel B quater successive victor existat, cujus eventus probabilitas est $\frac{2}{16}$ seu $\frac{1}{8}$: Ut tertium contingat oportet ut C ter victor existat, cujus eventus probabilitas est etiam $\frac{1}{8}$: Ut quartum contingat oportet ut D bis successive vincat, quod probabilitatem habet $\frac{1}{4}$; Ut quintum contingat, oportet ut E semel vincat, cujus eventus probabilitas est $\frac{1}{2}$;

ergo

ergo lusoris F probabilitas vincendi est $= \frac{1}{8}t + \frac{1}{8}u + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y$. Sic inter æquationes No. 2. est, *ex. gr.* $x = \frac{1}{2}l + \overline{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \frac{1}{2^n}} \times h + \frac{1}{2^n} \times 1$. Collusor enim qui certat cum adversario qui jam bis successive victor extitit, vincere potest vel omnes collusores, vel aliquos, vel nullum. Prioris eventus probabilitas est $\frac{1}{2^n}$, secundi $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \frac{1}{2^n}$, & tertii $\frac{1}{2}$; si primus eventus contingat, probabilitas vincendi evadit certitudo integra seu 1; si secundus, exit è ludo relinquens collusorem qui semel vicit; si tertius, exit è ludo relinquens collusorem qui ter successive vicit; adeoque sors ejus totalis est $\frac{1}{2} \times l + \overline{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots \frac{1}{2^n}} \times h + \frac{1}{2^n} \times 1$. Simili ratiocinio inveniuntur æquationes N°. 3. Collusor enim qui victus ab adversario exit è ludo, relinquens *ex.gr.* collusorem unius tantum ludi victorem, acquirit sortem vel ipsius C, vel ipsius D, vel ipsius E, vel ipsius F, &c. prout adversarius à quo victus est vincit vel omnes collusores præter unum, vel omnes præter duos, vel omnes præter tres, &c. unde sequitur quod $h = \frac{1}{2^{n-1}} \times c + \frac{1}{2^{n-2}} \times d + \frac{1}{2^{n-3}} \times e + \frac{1}{2^{n-4}} \times f +$ &c. Æquationes N°. 4. inveniuntur subtrahendo æquationes N°. 2. ab invicem: & æquationes N°. 5. subtrahendo æquationes N°. 3. ab invicem. Æquationes N°. 6. inveniuntur substituendo in æquationibus N°. 4. valores inventos per æquationes N°. 5. Æquationes N°. 7. inveniuntur quærendo valores ipsarum z, y, x, u, &c. per æquationes N°. 1. Et his valoribus substitutis in æquationibus N° 4. habebuntur æquationes No 8, quæ comparatæ cum æquationibus N°. 6.

dant æquationes N°. 9. ex quibus ſequitur quod $1+2^n.\ 2^n ::\ ::\ a : c :: c : d :: d : e$, &c. *Q.E.D.*

Corollarium.

Hinc facile inveniuntur probabilitates vincendi ſingulorum Colluſorum, quas habent tum ante ludum inceptum, tum in quolibet ſtatu in quem ludum proſequendo pervenire poſſunt. Si ſint, *ex gr.* tres colluſores A, B, C, erit $n=2$, & $1+2^n : 2^n :: 5 . 4 :: a . c$: id eſt, probabilitates vincendi ipſorum A, B, C, antequam A vicerit B, vel B vicerit A, ſe habent ut numeri $5, 5, 4$, adeoque ipſæ probabilitates ſunt $\frac{5}{14}, \frac{5}{14}, \frac{4}{14}$: omnes enim ſimul ſumptæ facere debent 1 ſeu certitudinem integram. Poſtquam A vicerit B, probabilitates vincendi ipſorum B, C, A, erunt h, y ſeu c, & (quia A æqualem habet expectationem ad victoriam, & ad ſortem ipſius B obtinendam) $\frac{1+h}{2}$ reſpectivè, *hoc eſt*, quia per æq. 1. N°. 3. $h=\frac{1}{2^{n-1}}\times c=\frac{1}{2}c$, & $c=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$ ut modo inventum, hæ probabilitates erunt $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}$, ut D. *de Moivre* invenit Coroll. 1. Prop. 15. pag. 242.

Si ſint quatuor colluſores A, B, C, D, erit $n=3$, & $1+2^n.\ 2^n :: 9, 8$, adeoque probabilitates colluſorum ab initio ludi erunt ut $9, 9, 8, \frac{8\times 8}{9}$, ſive ut $81, 81, 72, 64$, *hoc eſt*, ipſæ a, a, c, d, erunt $\frac{81}{298}, \frac{81}{298}, \frac{72}{298}$ & $\frac{64}{298}$. Poſtquam A vicerit B, probabilitates ipſorum B, D, C, A, erunt $h, d, c, \frac{1+3h}{4}$, eſt autem per æq. 1. N°. 3. $h=\frac{1}{2^{n-1}}\times c+\frac{1}{2^{n-2}}\times d=\frac{1}{4}c+\frac{1}{2}d$,

$c = \frac{72}{298} = \frac{36}{149}$, & $d = \frac{64}{298} = \frac{32}{149}$, ut modo inventum: ergo hæ probabilitates erunt $\frac{25}{149}$, $\frac{32}{149}$, $\frac{36}{149}$, $\frac{56}{149}$ respective. Postquam A vicerit B & C, probabilitates vincendi ipsorum C, B, D, A, erunt k, $\frac{c}{2}$, x, $\frac{1+b}{2}$, seu (quia per æq 2 N°. 3. $k = \frac{1}{2^{n-2}} \times d = \frac{1}{2} d$, & per æq. 3. N°. 7. $x = 2d - c$) $\frac{16}{149}$, $\frac{18}{149}$, $\frac{28}{149}$, $\frac{87}{149}$. Et nota quod calculi bonitas confirmetur ex eo, quod summæ harum probabilitatum, *hoc est*, $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}$ in priori exemplo, & $\frac{25}{149} + \frac{32}{149} + \frac{36}{149} + \frac{56}{149}$, nec non $\frac{16}{149} + \frac{18}{149} + \frac{28}{149} + \frac{87}{149}$ in posteriori exemplo, singulæ sint $= 1$ seu certitudini integræ.

THEOREMA II.

Positis quæ prius & insuper hac conditione, ut victus semper mulctetur summa p, quæ deposito augendo inserviat; quod depositum sic gradatim auctum illi soli cedat, qui omnium successive collusorum victor extiterit; denotatis etiam ut antea per literas minusculas a, c, d, e, &c. probabilitatibus vincendi ipsorum A (vel B), C, D, E, &c. respective: per easdem vero literas majusculas A, C, D, E, &c. ipsorum A (vel B), C, D, E, &c. expectationibus, *hoc est*, portionibus depositi quas singuli expectant: Dico, fore semper $C = \frac{\overline{A+ap} \times 2^n - ncp}{1+2^n}$

$$D = \frac{\overline{C + cp} \times 2^n - ndp}{1 + 2^n},\ E = \frac{\overline{D + dp} \times 2^n - nep}{1 + 2^n},\ \&c.$$

Demonstratio.

Denotetur ut prius per literas minuſculas z, y, x, u, t, &c. probabilitas vincendi ludentis cum adverſario, qui jam vel nullum, vel unum, vel duos, *&c* colluſores ſucceſſive vicit; per eaſdem vero literas majuſculas Z, Y, X, U, T, &c. ejus expectatio, quam ſcil. habet diverſis illis caſibus, depoſito exiſtente $n + 1$, $n + 1 + p$, $n + 1 + 2p$, $n + 1 + 3p$, &c. reſpective. Sic etiam per literas minuſculas h, k, l, m, &c. denotetur probabilitas vincendi luſoris victi ab adverſario, qui antea vel nullum, vel unum, vel duos, &c. colluſores ſucceſſive vicerat; quemadmodum per literas majuſculas H, K, L, M, &c. ejuſdem expectatio diverſis illis caſibus, depoſito exiſtente $n + 1 + p$, $n + 1 + 2p$. $n + 1 + 3p$, &c. reſpective. His poſitis iiſdem quibus antea ratiociniis invenientur ſequentes duodecim æquationum ſeries in *Tab.* II. ſignatæ N°. 1. N°. 2. N°. 3, &c. Inter æquationes N°. 1. *ex. gr.* eſt $E = \frac{U}{4} + \frac{X + xp}{4} + \frac{Y + 2yp}{2}$. Luſor enim E ludet vel cum luſore A, vel luſore B, vel C, vel D. Si ludit cum A vel B, expectatio ejus erit $= U$, quia ludit cum adverſario qui jam tres adverſarios vicit, depoſito exiſtente $n + 1 + 3p$. Si ludit cum luſore C, expectatio ejus erit $= X + xp$, ludit enim cum adverſario qui jam duos colluſores vicit, adeoque ſi depoſitum eſſet $n + 1 + 2p$ ejus expectatio eſſet $= X$: verum quia ludente E depoſitum eſt $= n + 1 + 3p$, ob tres colluſores victos & ſumma p mulctatos, addenda eſt expectationi X portio illa mulctæ unius p, quam luſor E ſperare poteſt: eſt autem hæc portio (quia probabilitas ejus vincendi eſt x) $= xp$, ejus igitur expectatio totalis tunc erit $= X + xp$. Sic ſi ludit cum luſore D, expectatio ejus erit $= Y + 2yp$: additur ad Y (quæ eſſet ejus expectatio depoſito exiſtente $n + 1 + p$) portio $2yp$, quæ ipſi debetur de duabus mulctis

mulctis $2p$, quibus depositum $n+1+3p$ majus est quam $n+1+p$. Simili modo habentur æquationes N°. 2. 3. 4. & 5. Substituendo autem primam æquationem N°. 2. *Tab.* I. in æquationibus N°. 4, habentur æquationes N°. 6. Et substituendo primam æquationem N°. 3. *Tab.* I. in æquationibus N°. 5. habentur æquationes. N°. 7. quibus dein in æquationibus No 6. substitutis habentur æquationes No. 8. Æquationes N° 9. inveniuntur quærendo valores ipsarum Z, Y, X, U, &c per æquationes N°. 1. *Tab.* I. & II. vel N° 2. *Tab* II. & N°. 7. *Tab.* I. Et his valoribus substitutis in æquationibus N°. 4. habentur æquationes N°. 10. Quæ comparatæ cum æquationibus N°. 8 (in quibus pro z substituatur a, per 1. æq. Tab. I.) dant æquationes N°. 11. Et hæ æquationes N°. 11. comparatæ cum æquationibus N°. 9. *Tab.* I. dant æquationes N°. 12, quæ constituunt Theorema, quod demonstrandum erat.

Corollarium.

Hinc quoque facile inveniuntur singulorum Collusorum sortes seu expectationes, ipsorumque adeo lucra vel damna. Sint *ex. gr.* tres collusores A, B, C: erit $C = \dfrac{\overline{A + ap} \times 2^n - ncp}{1 + 2^n}$ $=$ (ob $n = 2$) $\dfrac{4A + 4ap - 2cp}{5}$ $=$ (ob $a = \dfrac{5}{14}$ & $c = \dfrac{2}{7}$ per coroll. Theor. 1.) $\dfrac{4A + \frac{6}{7}p}{5}$. Unde cum omnium trium expectationes simul sumptæ, *id est*, $A + A + C$ æquare debeant id quod ab initio depositum fuit, *id est* 3, erit $2A + \dfrac{4A + \frac{6}{7}p}{5} = \dfrac{14A + \frac{6}{7}p}{5} = 3$, & $14A = 15 - \frac{6}{7}p$, & $A = \dfrac{15}{14} - \dfrac{3}{49}p =$ expectationi lusoris A vel B: proinde C expectatio lusoris tertii $C = \dfrac{4A + \frac{6}{7}p}{5} = \dfrac{6}{7} + \dfrac{6}{49}p$. A quibus

bus expectationibus si subtrahatur 1, id quod ab initio singuli deposuerunt, remanebit ibi $\frac{1}{14} - \frac{3}{49}p$, hic $\frac{6}{49}p - \frac{1}{7}$; quemadmodum D. *de Moivre* invenit. *Exempl.* 2. Sint collusores 4, *A*, *B*, *C*, *D*, erit $C = \frac{\overline{A+ap} \times 2^n - ncp}{1+2^n} =$ (ob $n = 3$) $\frac{8A + 8ap - 3cp}{9} =$ (ob $a = \frac{81}{298}$ & $c = \frac{36}{149}$, per coroll. Theor. 1.) $\frac{8A + \frac{216}{149}p}{9}$; item $D = \frac{\overline{C+cp} \times 2^n - ndp}{1+2^n} = \frac{8C + 8cp - 3dp}{9} =$ (ob $d = \frac{32}{149}$ per id. corr.) $\frac{8C + \frac{192}{149}p}{9} = \frac{64A + \frac{3456}{149}p}{81}$: unde habebitur æquatio $2A + C + D = 2A + \frac{8A + \frac{216}{149}p}{9} + \frac{64A + \frac{3456}{149}p}{9} = \frac{298A + \frac{5400}{149}p}{81} = 4$, sive $149A + \frac{2700}{149}p = 162$, & $A = \frac{162}{149} - \frac{2700}{22201}p$. Hinc $C = \frac{8A + \frac{216}{149}p}{9} = \frac{144}{149} + \frac{1176}{22201}p$, & $D = \frac{64A + \frac{3456}{149}p}{81} = \frac{128}{149} + \frac{4224}{22201}p$. Subtracta autem unitate 1, quam singuli ab initio ludi deposuerunt, remanebit $\frac{13}{149} - \frac{2700}{22201}p$ pro lusore *A* vel *B*, $\frac{1176}{22201}p - \frac{5}{149}$ pro *C*, & $\frac{4224}{22201}p - \frac{21}{149}$ pro *D*; quæ singula indigitabunt lucrum vel damnum, prout pars affirmata præpollet negatæ, vel contra. Simili ratione habebuntur etiam sortes quas acquirunt in quolibet statu in quem ludum prosequendo pervenire possunt.

THEO-

THEOREMA 3.

Positis quæ prius, si adsint spectatores Q, R, S, T, U, &c. quorum numerus sit n unitate minor quam numerus collusorum, quorumque prior Q affirmet certamen finitum iri post $n+p$ ludos peractos, R post $n+p-1$, S post $n+p-2$, T post $n+p-3$, U post $n+p-4$, *&c* præcise, non antea; sintque q, r, s, t, u, &c. sortes ipsorum Q, R, S, T, U, &c. Dico fore $q = \frac{1}{2}r + \frac{1}{4}s + \frac{1}{8}t + \frac{1}{16}u +$ &c.

Demonstratio.

Vocetur A collusor ille, qui post $n+p$ ludos vincere supponitur: hic intrare debet in ludum post p ludos peractos, & tum ludet contra adversarium, qui jam vel unum vel duos, vel tres, &c. collusores successive vicit. Jam cum, ut primus casus contingat, & ut collusor A omnes suos collusores præter unum, *id est*, $n-1$ collusores successive vincat, æque probabile sit quam ut adversarius ejus vincat $n-1$ collusores, *id est*, (quia jam unius collusoris victor fuit) ut certamen finiat post $n+p-1$ ludos peractos; hujusque eventus probabilitas sit $= r$: erit probabilitas ut collusor A unum adhuc collusorem vincat, *id est*, certamen finiat post $n+p$ ludos $= \frac{1}{2}r$. Sic, ut secundus; casus existat, & ut A omnes collusores præter duos vincat, æquè probabile est quam ut certamen finiatur post $n+p-2$ ludos, adeoque ut tunc A vincat adhuc duos collusores, *id est*, ut certamen finiat post $n+p$ ludos, probabilitas erit $= \frac{1}{4}s$. Eodem modo ut, tertio casu existente, A vincat omnes collusores, probabilitas est $= \frac{1}{8}t$; ut quarto $= \frac{1}{16}u$, *&c.* Quare ut

indiffe-

indifferenter certamen finiatur post $n+p$ ludos, probabilitas est $\frac{1}{2}r+\frac{1}{4}s+\frac{1}{8}t+\frac{1}{16}u+$ &c. $=q$. *Q. E. D.*

Corollarium 1.

Facile hinc invenitur quænam sit probabilitas ut certamen finiatur intra datum quemvis ludorum numerum. Series enim fractionum incipientium à fractione $\frac{1}{2^{n-1}}$, quarum denominatores crescant in continua proportione dupla, numerator autem cujusque fractionis sit summa numeratorum tot fractionum immediate præcedentium quot sunt unitates in $n-1$, dabit omnes successive probabilitates, ut certamen finiatur peractis præcise n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ &c. ludis: & per consequens si addantur tot termini hujus seriei quot sunt unitates in $p+1$, summa ipsorum exprimet probabilitatem ut certamen finiatur ad minimum ludis $n+p$ peractis. *Ex. gr.* Si sint collusores 4, adeoque $n=3$, habebitur hæc series $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{2}{16}, \frac{3}{32}, \frac{5}{64}, \frac{8}{128}, \frac{13}{256}, \frac{21}{512}$ &c. E qua si fiat alia $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{8}{16}, \frac{19}{32}, \frac{43}{64}, \frac{94}{128}, \frac{201}{256}$, *&c.* cujus termini sint summæ terminorum præcedentis seriei, denotabunt iidem termini qualis sit probabilitas ut certamen finiatur ad minimum 3, 4, 5, 6, *&c.* ludis.

Corollarium 2.

Potest terminus quicunque prioris seriei (excepto primo termino,) ut & summa omnium terminorum, *id est*, terminus quicunque posterioris seriei, per formulam generalem exprimi hoc modo. Si $n+1$ sit numerus collusorum, & p sit numerus terminorum, erit ultimus terminus prioris seriei $\frac{1}{2^n}$

$$\frac{1}{2^n} - \frac{p-n+1}{1\times 2^{2n}} + \frac{\overline{p-2n}\times \overline{p-2n+3}}{1\times 2\times 2^{3n}} -$$

$$-\frac{\overline{p-3n}\times\overline{p-3n+1}\times\overline{p-3n+5}}{1\times 2\times 3\times 2^{4n}} +$$

$$+\frac{\overline{p-4n}\times\overline{p-4n+1}\times\overline{p-4n+2}\times\overline{p-4n+7}}{1\times 2\times 3\times 4\times 2^{5n}}, -\text{\&c.}$$ Et

ſumma omnium terminorum ſive ultimus terminus poſterioris ſeriei $= \frac{p+1}{1\times 2^n} - \frac{\overline{p-n}\times\overline{p-n+3}}{1\times 2\times 2^{2n}} + \frac{\overline{p-2n}\times\overline{p-2n+1}\times\overline{p-2n+5}}{1\times 2\times 3\times 2^{3n}}$

$$-\frac{\overline{p-3n}\times\overline{p-3n+1}\times\overline{p-3n+2}\times\overline{p-3n+7}}{1\times 2\times 3\times 4\times 2^{4n}} + \text{\&c.}$$

Tabula I.

Intrat		Exit.	
	Sors		Sors
0	z	1	h
1	y	2	k
2	x	3	l
3	u	4	m
4	t		

N°. 1

$$a = z$$
$$c = y$$
$$d = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$$
$$e = \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y$$
$$f = \frac{1}{8}t + \frac{1}{8}u + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y$$

N°. 2.

$$z = \frac{1}{2} + \overline{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \frac{1}{2^n}} \times h + \frac{1}{2^n}\times 1$$

$$y = \frac{1}{2}k + \overline{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \frac{1}{2^n}} \times h + \frac{1}{2^n}\times 1.$$

$$x = \frac{1}{2}l + \overline{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \frac{1}{2^n}} \times h + \frac{1}{2^n}\times 1.$$

$$u = \frac{1}{2}m + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \frac{1}{2^n} \times h + \frac{1}{2^n}\times 1$$

No. 3.

N°. 3.

$$b=\frac{1}{2^{n-1}}\times c+\frac{1}{2^{n-2}}\times d+\frac{1}{2^{n-3}}\times e+\frac{1}{2^{n-4}}\times f+\ldots$$

$$k=\frac{1}{2^{n-2}}\times d+\frac{1}{2^{n-3}}\times e+\frac{1}{2^{n-4}}\times f+\ldots$$

$$l=\frac{1}{2^{n-3}}\times e+\frac{1}{2^{n-4}}\times f+\ldots$$

$$m=\frac{1}{2^{n-4}}\times f+\ldots$$

N°, 4.	N°. 6.	N°. 8.
$z-y=\frac{1}{2}h-\frac{1}{2}k$	$=\frac{1}{2^{n}}\times c$	$=a-c$
$y-x=\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}l$	$=\frac{1}{2^{n-1}}\times d$	$=2c-2d$
$x-u=\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}m$	$=\frac{1}{2^{n-2}}\times e$	$=4d-4e$

N°. 5.	N°. 7.	N°. 9.
$h-k=\frac{1}{2^{n-1}}\times c$	$z=a$	$c=a\times\frac{2^{n}}{1+2^{n}}$
	$y=c$	
$k-l=\frac{1}{2^{n-2}}\times d$	$x=2d-y=2d-c$	$d=c\times\frac{2^{n}}{1+2^{n}}$
	$u=4e-x-2y=4e-2d-e$	
$l-m=\frac{1}{2^{n-3}}\times e$		$e=d\times\frac{2n}{1+2^{n}}$

Corollarium 3.

Poteſt quis priuſquam ludus inchoetur in ſe ſuſcipere, ut ſummam $n+1$ de qua colluſores contendunt, & mulctas omnes pendat, ſi ſibi initio in manus datum ſit $n+1+2^{n}-1\times p$.

Demonſtrationem duorum præcedentium corollariorum curioſis indagandam relinquo.